17007

සියලු ම හිමිකම් ඇවිරිණි]
All Rights Reserved]

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව / **Department of Examinations, Sri Lanka**

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 1993 අගෝස්තු
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 1993

(01) ශුද්ධ ගණිතය I
(01) Pure Mathematics I

01 S I

පැ තුනයි / *Three hours*

ප්‍රශ්න **හයකට** පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

---

1. (a) $S_n = \sum_{r=1}^{n} u_r$ යැයි ගනිමු ; මෙහි $u_r = r(r+1)(r+2)$.

$S_n = \frac{1}{4} n(n+1)(n+2)(n+3)$ බව පෙන්වන්න.

එනයින් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ, $V_r = \frac{1}{S_r}$ විට

$\sum_{r=1}^{n} V_r$ සොයන්න.

$\sum_{r=1}^{\infty} u_r$ ශ්‍රේණිය අභිසාරී නොවන බව ද එහෙත්

$\sum_{r=1}^{\infty} V_r$ ශ්‍රේණිය අභිසාරී බව ද අනන්තය තෙක් එහි ඓක්‍යය $\frac{2}{9}$ බව ද පෙන්වන්න.

(b) ගණිත අභ්‍යුහනය මූලධර්මය භාවිතයෙන් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ, n යනු ධන නිඛිලයක් විට

$$2^{2n+1} - 6n - 2$$

යන්න 18 න් බෙදෙන බව සාධනය කරන්න.

2. (a) $\frac{x^2 + 9x - 20}{x^2 - 11x + 30} \geq -1$ ද $x^2 - 11x + 30 \neq 0$ ද

වන පරිදි වූ x හි අගය පරාසය සොයන්න.

(b) a, b, c, p, q, r සියල්ලම ධන නම්

$$\left(\frac{p}{a} + \frac{q}{b} + \frac{r}{c}\right)\left(\frac{a}{p} + \frac{b}{q} + \frac{c}{r}\right) \geq 9$$

බව පෙන්වන්න.

(c) $|5 - 3x| \geq 2 - 3x$

වන පරිදි වූ x හි අගය පරාසය සොයන්න.

3. (a) a, b, c සියල්ලම ප්‍රභින්න යැයි උපකල්පනය කරමින්

$$\frac{x^3}{(x-a)(x-b)(x-c)} \quad \text{ප්‍රකාශනය} \quad k + \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c}$$

ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න ; මෙහි k, A, B, C යනු නිර්ණය කළ යුතු නියත වේ.

$a = b \neq c$ අවස්ථාව ද සාකච්ඡා කරන්න.

a, b, c, d සියල්ල ම ප්‍රභින්න විට

$$\frac{a^3}{(a-b)(a-c)(a-d)} + \frac{b^3}{(b-c)(b-d)(b-a)} + \frac{c^3}{(c-d)(c-a)(c-b)} + \frac{d^3}{(d-a)(d-b)(d-c)} = 1$$

බව අපෝහනය කරන්න.

(b) ඒකජ සාධක දෙකක් ලබා ගැනීමෙන්

$$(a-x)^4 + (x-1)^4 - (a-1)^4$$

ප්‍රකාශනයේ සාධක සොයන්න

4. $(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = 1$ සපුරාලන, $-\pi < \theta \leq \pi$ ප්‍රාන්තරයෙහි පිහිටියා වූ θ හි ප්‍රභින්න අගයන් තුන නිර්ණය කරන්න.

එනයින්, $\omega^3 = 1$ සමීකරණය සපුරාලන එකිනෙකට වෙනස් ω සංඛ්‍යා $a + ib$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න ; මෙහි a සහ b තාත්ත්වික වේ. $\omega \neq 1$ නම්, $1 + \omega + \omega^2 = 0$ බව අපෝහනය කරන්න.

p සහ q තාත්ත්වික විට, $x^3 - 3pqx - p^3 - q^3$

ප්‍රකාශනය

$$(x - p - q)(x - p\omega - q\omega^2)(x - p\omega^2 - q\omega)$$

ආකාරයෙන් සාධකවලට බිඳිය හැකි බව පෙන්වන්න.

එනයින්, $z^3 - 18z - 35 = 0$ සපුරාලන z සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවල අගයන් සොයන්න.

5. ආර්ගන් සටහනෙහි, z_1 සහ z_2 සංකීර්ණ සංඛ්‍යා පිළිවෙලින් P_1 සහ P_2 ලක්ෂ්‍ය මගින් නිරූපණය කෙරේ. λ යනු තාත්ත්වික පරාමිතියක් විට $z_1 + \lambda(z_2 - z_1)$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව ආර්ගන් සටහනෙහි නිරූපණය කැරෙන P ලක්ෂ්‍යයේ පිහිටීම සොයන්න.

$$z_1 = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} \quad \text{සහ} \quad z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

යැයි ගනිමු.

$$\frac{P_1P'}{P_1P_2} = \frac{1}{3} \quad \text{සහ} \quad \frac{P_1P''}{P_1P_2} = -1$$

වන පරිදි සහ P_1P_2 මත ලක්ෂ්‍ය දෙකම පවතින සේ පිහිටියාවූ P' සහ P'' ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙලින් නිරූපණය කැරෙන z' සහ z'' සංකීර්ණ සංඛ්‍යා සොයන්න.

තවද, විස් (z') සහ විස් (z'') ලබාගන්න. $(-\pi <$ විස් $z \leq \pi)$

එනයින් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ, P' සහ P'' ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙලින් P_1OP_2 කෝණයේ අභ්‍යන්තර සහ බාහිර සමච්ඡේදක මත පිහිටන බව පෙන්වන්න ; මෙහි O මූලය වේ.

6. (a) *GONAPINUWALA* වචනයේ අක්ෂරවලින් සෑදිය හැකි විවිධ සංකරණ සංඛ්‍යාව,

(i) අක්ෂර දෙළහෙන් වරකට අක්ෂර සියල්ලම ගත් විට

(ii) අක්ෂර දෙළහෙන් වරකට ඕනෑම අක්ෂර හතරක් ගත් විට

සොයන්න.

(b) එකිනෙකට වෙනස් රිදී කාසි දහයක් සහ එකිනෙකට වෙනස් තඹ කාසි පහක් අඩංගු මල්ලකින් කාසි අටක් ගත හැකි සංයෝජන සංඛ්‍යාව,

(i) තේරීම් මත කිසිම සීමා කිරීමක් නොමැති විට

(ii) තෝරාගත් කාසි අතර යටත් පිරිසෙයින් තඹ කාසි දෙකක් වත් තිබිය යුතු විට,

සොයන්න.

7. සුපුරුදු අංකනයෙන්, n ධන නිඛිලයක් විට,

$$(a + x)^n = a^n + {}^nC_1 a^{n-1} x + {}^nC_2 a^{n-2} x^2 + \dots + {}^nC_r\, a^{n-r} x^r + \dots + x^n$$

බව සාධනය කරන්න.

ශුද්ධ වීජීය ක්‍රම යොදා ගැනීමෙන්

(i) $C_1 + 2C_2 + 3C_3 + \dots + rC_r + \dots + n\,C_n = n2^{n-1}$

(ii) $C_0 - \frac{1}{2}C_1 + \frac{1}{3}C_2 + \dots + (-1)^r \frac{C_r}{r+1} + \dots + (-1)^n \frac{C_n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$

බව පෙන්වන්න ; මෙහි

$$(1 + x))^n = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \dots + C_r x^r + \dots + x^n .$$

8. (a) $-1 < x < 1$ විට x විෂයයෙන් අවකලනය කරන්න.

(i) $\tan^{-1}\left(\frac{1}{1-x}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{1}{1+x}\right)$

සහ (ii) $\sin^{-1}\left(\frac{2x}{\sqrt{4 + x^4}}\right)$

උත්තර දෙකම සමාන වන්නේ මන්දැයි පහදන්න.

(b) ප්‍රථමධර්මවලින්, x විෂයයෙන් $\sec x$ හි ව්‍යුත්පන්නය සොයන්න.

$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ සහ $y = (\sec x + \tan x)^{\frac{1}{2}}$ නම්

(i) $2\frac{dy}{dx} = y \sec x$

සහ (ii) $2\frac{d^2y}{dx^2} = (\sec x + 2\tan x)\frac{dy}{dx}$

බව සාධනය කරන්න.

9. (a) $\displaystyle\int \frac{8x + 7}{2x^2 + 8x + 10}\, dx$ සොයන්න.

(b) කොටස් වශයෙන් අනුකලනය කිරීමෙන්,

$$3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{3}{2}} x \; dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{cosec}^{\frac{1}{2}} x \; dx$$

බව පෙන්වන්න.

(c) $x = \tan\theta$ ආදේශයෙන් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ, n ධන නිඛිලයක් විට,

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \left(\frac{2n-4}{2n-2}\right) \int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}}$$

බව සාධනය කරන්න.

එනයින් හෝ අන් ක්‍රමයෙකින් හෝ,

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^4} = \frac{5\pi}{32}$$

බව පෙන්වන්න.

10. (a) $y = e^x \sin x$ නම් $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{2}\, e^x \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

බව පෙන්වන්න.

එනයින් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ, x^6 පදය තෙක් $e^x \sin x$ සඳහා මැක්ලෝරින් ප්‍රසාරණය ලියන්න.

(b) Ox අක්ෂයේ සෑම ඒකක $\frac{1}{2}$ කට ම කෝටික ගැනීමෙන් සිම්සන් සූත්‍රය යොදා,

$$\int_0^4 \frac{4x - x^2}{x^2 + 4}\, dx$$

සඳහා දළ අගයක් සොයන්න.

$y = \dfrac{4x - x^2}{x^2 + 4}$ සඳහා පහත දක්වෙන වගුව භාවිත කරන්න.

x	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0
y	0	0.4118	0.6	0.6	0.5	0.3659	0.7308	0.1077	0

11. $x = t^2 - 2t$, $y = t^3 - 12t$ සමීකරණවලින් වක්‍රයක් පරාමිතිකව දී ඇත. $\dfrac{dx}{dt}$, $\dfrac{dy}{dt}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ රාශි t ඇසුරෙන් සොයන්න.

එනයින් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ, වක්‍රය මත උපරිම හා අවම ලක්ෂ්‍ය ලබාගන්න. $P(8, 16)$ ලක්ෂ්‍යයට අනුරූප වූ t හි අගයන් නිර්ණය කරන්න. P ගැන කුමක් කිව හැකි ද?

තවද, වක්‍රය බණ්ඩාංක ඡේදනය කරන ලක්ෂ්‍යයන් ද y අක්ෂයට සමාන්තරව ස්පර්ශක පවතින ලක්ෂ්‍යයන් ද නිර්ණය කරන්න.

ඉහත ප්‍රතිඵල භාවිතයෙන්, වක්‍රයේ දළ සටහනක් අඳින්න.

12. $y = \dfrac{(x-2)^2}{x^2+4}$ මගින් C වක්‍රයක් ගෙන දේ.

(i) $0 \le y \le 2$ සහ (ii) $x \to \pm\infty$ විට $y \to 1$ බව පෙන්වන්න.

එනයින් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ C මත ස්ථාවර ලක්ෂ්‍යවල ඛණ්ඩාංක ලියන්න. C වක්‍රයේ දළ සටහනක් අඳින්න.

C වක්‍රය උපයෝගී කර ගැනීමෙන් සහ සමමිතික බව සැලැකීමෙන්, $y = \dfrac{(x+2)^2}{x^2+4}$ මගින් දෙනු ලබන C' වක්‍රයේ දළ සටහනක්ද එම රූ සටහනෙහිම අඳින්න.

තවද C වක්‍රයෙනුත් $x = 2$, $y = 1$ රේඛා මගිනුත් අන්තර්ගත වන S පෙදෙසේ වර්ගඵලය සොයන්න.

ඒ නයින් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ $x = 2$ රේඛාවෙනුත් $0 \le x \le 2$ ප්‍රාන්තරයේ දී C, C' වක්‍ර මගින් සෑදෙන C'' වක්‍රයෙනුත් අන්තර්ගත වන S' පෙදෙසේ වර්ගඵලය අපෝහනය කරන්න.

$y = 1$ රේඛාව වටා රේඩියන් π වලින් S' භ්‍රමණය කිරීමෙන් ජනනය වන ඝනයේ පරිමාව සොයන්න.

සියලු ම හිමිකම් ඇවිරිණි]
All Rights Reserved]

17016

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව / **Department of Examinations, Sri Lanka**

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 1993 අගෝස්තු General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 1993
(01) ශුද්ධ ගණිතය II (01) Pure Mathematics II — 01 / S / II
පැ තුනයි / *Three hours*

ප්‍රශ්න **හයකට** පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

1. *ABCD* යනු වෘත්ත චතුරස්‍රයකි. *X* වනාහි $\angle ABD = \angle CBX$ වන පරිදි *AC* මත පිහිටි ලක්ෂ්‍යයකි. $AX = \dfrac{AB \, . \, CD}{BD}$ බව පෙන්වන්න. එනයින්,

$$AD \, . \, CB + AB \, . \, CD = AC \, . \, BD$$

බව අපෝහනය කරන්න.

ABC සමපාද ත්‍රිකෝණයෙහි පරිවෘත්තයේ *BC* චාපය මත *P* පිහිටයි නම්, $PA = PB + PC$ බව සාධනය කරන්න.

විලෝම වශයෙන්, *A, B, C* යනු සමපාද ත්‍රිකෝණයක ශීර්ෂ වූවිට $PA = PB + PC$ නම්, *P* හි පථය *ABC* ත්‍රිකෝණයේ පරිවෘත්තයේ චාපයක් බව සාධනය කරන්න.

2. *OABC* චතුස්තලයෙහි, *OB* ට සහ *OC* ට *OA* ලම්බ වන අතර $OC = BC = a$, $OA = OB = \sqrt{2}\, a$. *OC* හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය වන *K* හරහා, *OCB* ත්‍රිකෝණයෙහි *CD* මධ්‍යස්ථයට සමාන්තර වන සේ *KL* රේඛාව අඳිනු ලබන්නේ *L* හිදී *OB* ඡේදනය වන සේ ය. *N* හි දී *AB* ඡේදනය වන සේ *OAB* ත්‍රිකෝණයේ *OP* මධ්‍යස්ථයට සමාන්තරව *L* හරහා *LN* රේඛාව අඳිනු ලැබේ.

K, L, N හරහා යන α තලය *AB* ට ලම්බ බව පෙන්වන්න.

A ශීර්ෂයේ සිට α ට ඇති දුර සොයන්න.

α තලයත් *AC* ත් *M* හි දී ඡේදනය වෙයි නම් *M* මගින් *AC* රේඛාව 5 : 1 අනුපාතයෙන් බෙදෙන බව පෙන්වන්න.

3. $lx + my + n = 0$ සරල රේඛාව මත $P \equiv (\alpha \, , \beta)$ ලක්ෂ්‍යයෙහි ප්‍රතිබිම්බයේ ඛණ්ඩාංක සොයන්න.

ABC ත්‍රිකෝණයක *A, B, C* ශීර්ෂ පිහිටා ඇත්තේ පිළිවෙළින් $y = x$, $y = 2x$, $y = 3x$ රේඛා මත ය. *AB* හි ලම්බ සමච්ඡේදකයේ සමීකරණය $3y + x - 18 = 0$ වේ. *BC* රේඛාව $y + x = 0$ සරල රේඛාවට සමාන්තර ය. *ABC* ත්‍රිකෝණයේ පාදවල සමීකරණ ලබාගන්න.

4. (*a*) $r = 2a \cos \theta$ ධ්‍රැවක සමීකරණයෙන් *O* ධ්‍රැවය හරහා යන අරය *a* සහිත වෘත්තයක් නිරූපණය කරන බව පෙන්වන්න. එම වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය කුමක් ද?

$r = 2a \cos (\theta - \alpha)$ සහ $r = 2b \sin (\theta - \alpha)$ මගින් සෘජු කෝණිව ඡේදනය වන වෘත්ත දෙකක් නිරූපණය කරන බව පෙන්වන්න ; මෙහි *a, b,* α නියත වේ.

(*b*)

$$S_1 \equiv x^2 + y^2 - 9 = 0$$
$$S_2 \equiv (x-5)^2 + y^2 - 4 = 0$$
$$S_3 \equiv (x-5)^2 + (y-12)^2 - 100 = 0$$

වෘත්ත තුන බාහිර ව එකිනෙක ස්පර්ශ කරන බව පෙන්වන්න. එම වෘත්තවල සුළු චාප මගින් අන්තර්ගත වන ක්ෂේත්‍රඵලය $\dfrac{1}{2}(60 - 52\pi + 91\alpha)$ බව පෙන්වන්න ; මෙහි $\alpha = \tan^{-1}\left(\dfrac{12}{5}\right)$

5. (a) අරය r සහිත S වෘත්තයක් x අක්ෂයත් y අක්ෂයත් ස්පර්ශ කරයි. S හි සමීකරණය සොයන්න. එවැනි වෘත්ත කොපමණ සංඛ්‍යාවක් ඇඳිය හැකි ද?

ඛණ්ඩාංක දෙකම ස්පර්ශ කරන්නා වූ ද (2, 1) ලක්ෂ්‍යය හරහා යන්නා වූ ද වෘත්ත දෙකෙහි සමීකරණ ලබා ගන්න.

(b) $x^2+y^2 = 25$ වෘත්තයත් $y - x + 1 = 0$ රේඛාවේත් ඡේදන ලක්ෂ්‍ය හරහා S, S' වෘත්ත දෙකක් අඳිනු ලැබ ඇත්තේ S සහ S' වෘත්ත දෙකම $x + y - 25 = 0$ රේඛාව ස්පර්ශ කරන පරිදි ය. S සහ S' හි සමීකරණ සොයන්න.

S සහ S' හි පොදු ස්පර්ශක ඡේදනය නොවන බව ද පෙන්වන්න.

6. $P(at^2, 2at)$ ලක්ෂ්‍යයේ දී $y^2 = 4ax$ පරාවලයට ඇඳි ස්පර්ශකයේ සමීකරණය $ty = x + at^2$ බව පෙන්වා P හි දී අභිලම්බයේ සමීකරණය ලියන්න.

$P_1(4t_1^2, 8t_1)$ සහ $P_2(4t_2^2, 8t_2)$ ලක්ෂ්‍ය දෙක හරහා $y^2 = 16x$ පරාවලයට ඇඳි ස්පර්ශක T හි දී හමුවේ. පරාවලයට P_1 සහ P_2 හි දී ඇඳි අභිලම්බ N හි දී හමුවේ. P_1 සහ P_2 හි ස්පර්ශක ලම්බ වේ නම්,

(i) P_1 විචලනය වන විට, T හි පථය $x + 4 = 0$ සරල රේඛාව බව පෙන්වන්න.

(ii) TN රේඛාව x අක්ෂයට සමාන්තර බව ද P_1 විචලනය වන විට N හි පථය $y^2 = 4(x-12)$ පරාවලය බව ද පෙන්වන්න.

7. ඉලිප්සයක්, $25x^2 + 16y^2 = 400k^2$ සමීකරණයෙන් දී ඇත ; මෙහි k යනු ධන නියතයකි. එහි විකේන්ද්‍රිකතාව සොයා, නාභීන් $S \equiv (0, 3k)$ සහ $S' \equiv (0, -3k)$ ලක්ෂ්‍ය බව පෙන්වන්න.

$P\left(\frac{16k}{5}, -3k\right)$ ලක්ෂ්‍යයේ දී ස්පර්ශකය, A හි දී x අක්ෂය ද B හි දී y අක්ෂය ද ඡේදනය කරන අතර P හිදී ඉලිප්සයට ඇඳි අභිලම්බය C හි දී x අක්ෂය ද D හි දී y අක්ෂය ද ඡේදනය කරනු ලබයි.

A, B, C, D හි ඛණ්ඩාංක නිර්ණය කරන්න. AOB ත්‍රිකෝණයේ ක්ෂේත්‍රඵලය, COD ත්‍රිකෝණයෙහි ක්ෂේත්‍රඵලය මෙන් $\left(\frac{25}{9}\right)^3$ ගුණයක් බව පෙන්වන්න.

8. බහුවලයක සමීකරණය $xy = c^2$ වේ ; මෙහි c ධන නියතයකි. එහි විකේන්ද්‍රිකතාව සොයා, $x > 0$ පෙදෙසෙහි පිහිටන S නාභියෙහි ඛණ්ඩාංක ලබා ගන්න.

(i) $P\left(ct, \frac{c}{t}\right)$ ලක්ෂ්‍යයෙහි දී බහුවලයට ඇඳි අභිලම්බය, Q ලක්ෂ්‍යයේ දී $y = x$ රේඛාව හමුවෙයි. PQ හි දිග සොයා, එය $c\sqrt{2}$ ට වැඩි බව පෙන්වන්න.

(ii) $y > 0$ පෙදෙසෙහි පවතින බහුවලයේ ශාඛාවට බාහිර ලක්ෂ්‍යයක සිට අඳිනු ලබන ස්පර්ශක S හි දී සමාන කෝණ ආපාතනය කරනු ලබන බව පෙන්වන්න.

9. (a) A, B, C යනු ත්‍රිකෝණයක කෝණ නම්,

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2\cos A \cos B \cos C$$

බව සාධනය කරන්න.

(b) $2A + B = \frac{\pi}{4}$ නම්,

$$\tan B = \frac{1 - 2\tan A - \tan^2 A}{1 + 2\tan A - \tan^2 A}$$

බව පෙන්වන්න.

$\tan\frac{\pi}{8}$ යන්න, $x^2 + 2x - 1 = 0$ සමීකරණයෙහි මූලයක් බව ද එහි අගය $\sqrt{2} - 1$ බව ද අපෝහනය කරන්න.

අනෙක් මූලය $\tan\theta$ නම්, $(0, \pi)$ පරාසයෙහි පිහිටි θ සොයන්න.

10. (a) (i) $\sqrt{3}\,(\sin x + \cos x)^2 = \cos 2x$

(ii) $\tan^{-1}\left(\frac{1}{x - 1}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{1}{x + 1}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

සමීකරණ විසඳන්න.

(b)

$$2 \sin y \, \sin (x + y) = \cos x$$
$$\cot x + \sin 2y = \sin 2x$$

සමීකරණ x සහ y සපුරාලයි.

ඉහත පළමුවැනි සමීකරණය $\sin x \sin 2y = \cos x \cos 2y$ යන ආකාරයෙන් ලිවිය හැකි බව පෙන්වා හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ y හි සමීකරණයක් ලබා ගන්න. ඒ නයින් $0 \leq x \leq \pi$ සහ $0 \leq y \leq \pi$ විට x ද y ද සඳහා ඉහත සමගාමී සමීකරණ විසඳන්න.

11. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ යනු සංගහනයකින් ගත් නිරීක්‍ෂා n වේ. නියැදි මධ්‍යනය $\bar{x}$ සහ නියැදි විචලතාව S_x^2 වේ.

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \quad \text{සහ} \quad S_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$ ලෙස අර්ථ දක්වේ.

$$S_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2$$

ආකාරයෙන් S_x^2 ලිවිය හැකි බව පෙන්වන්න.

$y_1, y_2, \ldots, y_m$ යනු දෙවැනි සංගහනයකින් ගත් නිරීක්‍ෂා m ද $\bar{y}$ සහ S_y^2 යනු පිළිවෙලින් නියැදි මධ්‍යනය සහ නියැදි විචලතාව ද යැයි ගනිමු. $\bar{z}$ සහ S_z^2 යනු සංයෝජිත සංගහනයේ නියැදි මධ්‍යනය සහ නියැදි විචලතාව නම්

(i) $\bar{z} = \frac{n\bar{x} + m\bar{y}}{n + m}$

(ii) $\frac{n(\bar{z} - \bar{x})^2 + m(\bar{z} - \bar{y})^2}{n + m} = \frac{n\bar{x}^2 + m\bar{y}^2}{n + m} - \bar{z}^2$

(iii) $\frac{nS_x^2 + mS_y^2}{n + m} = \frac{1}{n + m}\left\{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=1}^{m} y_i^2\right\} - \frac{n\bar{x}^2 + m\bar{y}^2}{n + m}$

(iv) $S_z^2 = \frac{nS_x^2 + mS_y^2}{n + m} + \frac{n(\bar{z} - \bar{x})^2 + m(\bar{z} - \bar{y})^2}{n + m}$

බව පෙන්වන්න.

සසම්භාවී ලෙස තෝරාගත් උසස් පෙළ ශිෂ්‍යයන් 100 කට සහ සසම්භාවී ලෙස තෝරාගත් උසස් පෙළ ශිෂ්‍යාවන් 50 කට සංඛ්‍යානය ප්‍රශ්න පත්‍රයක් දෙන ලදී. ඔවුන් ලබාගත් ලකුණුවලින් ගණනය කරන ලද තොරතුරු පහත දක්වෙන වගුවෙන් දෙනු ලැබේ.

	අපේක්ෂක සංඛ්‍යාව	නියැදි මධ්‍යනය	නියැදි විචලතාව
ශිෂ්‍යයන්	100	41	9
ශිෂ්‍යාවන්	50	38	4

සංයෝජිත සංගහනයේ නියැදි මධ්‍යනය සහ නියැදි විචලතාව ගණනය කරන්න.

පුද්ගලික ලකුණුවල වැඩි විචල්‍යතාවක් ඇත්තේ ශිෂ්‍යයන් අතරේ ද නැතහොත් ශිෂ්‍යාවන් අතරේ ද?

(විචල්‍යතා සංගුණකය = $\frac{S_x}{\bar{x}}$.)

12. (*a*) A සහ B සිද්ධීන් දෙකක් ස්වායත්ත යැයි කියනු ලබන්නේ $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ ම නම් පමණක් වේ.

A සහ B යනු ස්වායත්ත සිද්ධි දෙකක් නම් ඒවායේ අනුපූරක සිද්ධීන් ද එකිනෙකට ස්වායත්ත බව පෙන්වන්න.

[$(A \cup B)' = A' \cap B'$ බව උපකල්පනය කළ හැකිය. මෙහි යන්නෙන් අනුපූරක සිද්ධිය හැඳින්වේ.]

කිසි යම් ආකාරයක ඕනෑ ම තරඟ වාරයක් A ක්‍රීඩකයා විසින් දිනීමේ සම්භාවිතාව 0.70 කි. තරඟ වාර තුනකින් යුත් එවැනි ක්‍රීඩාවකට A ඉදිරිපත් වෙයි. යටත් පිරිසෙයින් ක්‍රීඩාවේ එක තරඟ වාරයක් වත් A විසින් දිනා ගැනීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

(*b*) එක්තරා වර්ගයක ඕනෑම සෛලයක් කිසියම් පරීක්ෂණයකට භාජනය කළ විට, එක්කෝ a සම්භාවිතාවක් සහිත ව මිය යයි, නැතහොත් 0.25 සම්භාවිතාවක් සහිත ව නොකඩවා ජීවත් වෙයි එසේත් නැතහොත් b සම්භාවිතාවක් සහිතව සමාන සෛල දෙකකට බෙදෙයි. එවැනි සෛලයක් එම පරීක්ෂණයට භාජනය කළ විට, සජීවී සෛල සංඛ්‍යාව X මගින් හැඳින්වේ. සෛලවල මධ්‍යන්‍ය සංඛ්‍යාව වන $E(X)$, 1.05 ට සමාන නම්, a සහ b හි අගයයන් පිළිවෙලින් 0.35 සහ 0.40 බව පෙන්වන්න.

එවැනි සෛල දෙකක් එකම පරීක්ෂණයකට භාජනය කරනු ලැබූ විට, ඉතිරි වන සෛල සංඛ්‍යාව Y යන්නෙන් හැඳින්වේ නම්, Y හි සම්භාවිතා ව්‍යාප්තිය

$Y = y$	0	1	2	3	4
$P(Y = y)$	0.1225	0.275	0.3425	0.20	0.16

බව පෙන්වන්න.

Y හි මධ්‍යන්‍යය ද විචලතාව ද සොයන්න.